Коши формуласы.

$f(z)$ D облысында аналитикалық және оның L шекарасында үздіксіз болсын. Онда кез келген $\xi \in D$ нүктесі үшін

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-\xi}dt \qquad (2)$$

L бойынша алынатын интеграл бағыты D облысы сол жақта қалатындай етіп таңдалады.

Егер D облысының шекарасында $f(z)$ функциясының мәні анық болса, D тұйық облысында $f(z)$ аналитикалық функциясы толығымен анықталады, яғни Коши теоремасы (2) аналитикалық функция үшін шектік есепті шешеді.

L - Z комплекс жазықтығындағы кейбір тегіс тұйық контур болсын. L контурының ішкі облысын D^+ арқылы белгілейміз, ал шексіз алыс нүктесі бар қосымша $D^+ \bigcup L$, D^- арқылы сыртқы облысын белгілейміз. Контур $L \notin D^+$ және $L \notin D^-$. L контурын айналып өтудің оң бағыты үшін D^+ облысы сол жақта қалатындығын аламыз.

Егер $f(z)$ -D^+ облысында аналитикалық және $D^+ \bigcup L$-да үздіксіз болса, онда Коши формуласына сәйкес

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), z \in D^+, \\ 0, z \in D^-, \end{cases} \qquad (3)$$

Егер $f(z)$ - D^- облысында аналитикалық және $D^- \bigcup L$-да үздіксіз болса, онда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), z \in D^+, \\ -f(z) + f(\infty), z \in D^-, \end{cases} \qquad (4)$$

(4) формула –бұл Коши теоремасының тікелей салдары болып табылады, өйткені бұл жағдайда $f(\tau)/(\tau - z)(z \notin D^+)$ интеграл астындағы функция D^+ облысында аналитикалық және $D^+ \bigcup L$-да үздіксіз.

(3) және (4) формулалардың сол жағындағы интеграл Коши интегралы деп аталады.

3 Коши типтес интегралдар.

Енді L - толығымен жазықтықтың соңғы бөлігінде орналасқан тұйық немесе ашық тегіс контур, τ - оның нүктесінің комплекс координатасы және $\varphi(\tau)$ - контур нүктелерінің үздіксіз функциясы. Онда интеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \tag{5}$$

Коши интегралы сияқты құрылған интеграл *Коши типтес интеграл* деп аталады. $\varphi(\tau)$ функциясы оның тығыздығы, ал $1/(\tau - z)$ ядро деп аталады.

Қасиеттері.

1) $\Phi(z) - L$ контурының нүктелерін қоспағанда комплекс айнымалы жазықтықта аналитикалық функция.

$\Phi(z)$-тің аналитикалық дәлелі интеграл белгісінің астындағы z айнымалысы бойынша дифференциалдау мүмкіндігінен тұрады.

Жалпы жағдай үшін теорема мен оның дәлелін келтірейік. Одан дербес жағдай ретінде Коши типтес интегралдың аналитикалық сипаты шығады.

Теорема. $L -$ тегіс контур (тұйық немесе ашық), $f(\tau, z) - \tau \in L$ айнымалысы бойынша үздіксіз функция, D-ның кейбір облысында $\tau \in L$ барлық мәндері үшін z бойынша аналитикалық және барлық $\tau \in L$ және $z \in D$ үшін тұрақты M-мен шектелген. Онда қисықсызықты интегралмен берілген функция

$$F(z) = \int_L f(\tau, z) d\tau,$$

z айнымалысы бойынша аналитикалық функция.

Дәлеледеуі. Толығымен D-да жататын C-мен шектелген центрі z, радиусы R болатын шеңберді таңдаймыз. Онда z аналитикалық функциясын $f(\tau, z)$ Коши интегралымен, (5) интегралды келесідей жазуға болады:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\tau \int_C \frac{f(\tau, t)}{t - z} dt.$$

Өрнекті пайдалана отырып

$$\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{t-z-\Delta z}-\frac{1}{t-z}\right]-\frac{1}{(t-z)^2}=\frac{\Delta z}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)},$$

Мына теңдікті аламыз

$$J=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L d\tau\int_C\frac{f(\tau,t)dt}{(t-z)^2}=$$

$$=\frac{\Delta z}{2\pi i}\int_L d\tau\int_C\frac{f(\tau,t)dt}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)}.$$

$l-\ L$ қисығының ұзындығы болсын. Бағалауын тез табамыз

$$|J|=\frac{\Delta z}{2\pi i}\frac{M}{R^2(R-|\Delta z|)}2\pi Rl.$$

$|J|$ шамасын Δz жеткілікті аз кезінде кез келген берілген $\varepsilon>0$ санынан кіші етіп жасай аламыз. Демек $F(z)$ функциясының туындысы мынаған тең

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L d\tau\int_C\frac{f(\tau,t)}{(t-z)^2}dt. \tag{6}$$

Екінші жағынан, Коши формуласын тағы қолданып және оны дифференциалдап, келесі теңдікті алатын боламыз.

$$\frac{\partial f(\tau,z)}{\partial z}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\tau,t)dt}{(t-z)^2}.$$

Осыдан және (6)-дан кейін

$$F'(z)=\int_L\frac{\partial f(\tau,z)}{\partial z}d\tau.$$

Осылайша, $F(z)$ функциясы $f(\tau,z)$ аналитикалық облысының барлық жерінде z бойынша аналитикалық функция. $f(\tau,z)$ функциясы аналитикалық болмайтын z-тің осы мәндері $F(z)$ функциясының ерекше нүктелері болады.

Үздіксіз $\varphi(\tau)$ тығыздығы бар Коши типтес интеграл үшін интеграл астындағы функция z-ке қатысты аналитикалық болуды тоқтатын жалғыз нүктелер L интегралдау сызығының нүктесі болып табылады. Соңғысы $\Phi(z)$ (5) функциясы үшін ерекше сызық болады.

Анықтама. Егер L – ашық контур, онда $\Phi(z)$ функциясы L ерекше сызығымен берілген барлық жазықтықта аналитикалық функция болады. L – тұйық контур болсын. Онда $\Phi(z)$ функциясы екі жеке функцияларға бөлінеді: D^{+}-те анықталған $\Phi^{+}(z)$ және D облысының нүктелері үшін анықталған $\Phi^{-}(z)$. Бұл функциялар жалпы жағдайда бір-бірінің аналитикалық жалғасы болмайды. D^{+} және D^{-} екі облыста анықталған, $\Phi^{+}(z)$ және $\Phi^{-}(z)$ екі тәуелсіз өрнектермен сипаттала, бір-бірін толықтыратын $\Phi(z)$ аналитикалық функциясы бөлікті-аналитикалық функция деп аталады.

2) Коши типтес интегралмен (5) ұсынылған $\Phi(z)$ функциясы шексіз қашықтықтағы нүктеде нөлге ұмтылады.

Шын мәнінде, $\Phi(z)$-ті шексіз қашықтықтағы нүктелер айналасында $1/z$ дәрежелері бойынша қатарға орналастырамыз.

$$\frac{1}{\tau - z} = -\frac{1}{z} - \frac{\tau}{z^2} - \ldots - \frac{\tau^{n-1}}{z^n} - \ldots,$$

онда, $\varphi(\tau)/2\pi i$ көбейтіп және мүшелеп интегралдап

$$\Phi^{-}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},$$

аламыз, мұндағы

$$c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \tau^{k-1}\varphi(\tau)d\tau$$

$$\lim_{|z|\to\infty} \Phi^{-}(z) = \lim_{|z|\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k} = 0$$

Гёльдер шартын қанағаттандыратын функциялар. Анықтамасы және қасиеттері.

Коши типтес интегралдардың интегралдау сызығындағы күй-өзгерісін зерттеуге көшпей тұрып, функциялар классы туралы қосымша сұрақтарды қарастырайық.

$\varphi(t)$ – бір функция болсын, әрі t аргументі және $\varphi(t)$ функциясы нақты да комплексте бола алады.

Фунцияның үзіліссіздігі $|t_2 - t_1|$ өте кіші болғанда, $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$-де кіші болатындығынан шығады, яғни аргумент өсімшесімен функция өсімшесі бір уақытта нөлге ұмтылады.

Бұл жағдайда функция өсімшесінің аргумент өсімшесіне қатысты кіші дәрежелі болуы туралы сұрақ қарастырылмайды, ол дәреже кез-келген бола алады. Бірақ функцияның көптеген қасиеттері, мысалы, оны қатарға жіктеу және сол қатардың жинақтылығының жылдамдығы, интегралдармен берілуі және т.б., функцияның үзіліссіздік модулінің дәрежесінің кіші болуымен тығыз байланысты.

Анықтама. $\varphi(t)$ функциясының үзіліссіздік модулі деп $\omega(\delta) = \sup|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$ функциясын айтамыз, мұндағы $t_1, t_2 \in L$ және $|t_2 - t_1| < \delta$.

Сол себепті үзіліссіз функциялар классы үзіліссіздік модулінің дәрежесінің кіші болуына байланысты класстарға бөлінеді. Үзіліссіздік модулі аргумент өсімшесінен дәрежелік функция болатын функциялар маңызды класс болып табылады. Осы классты қарастыруға көшейік.

Анықтама. L – тұйық қисық және $\varphi(t)$ осы қисық нүктелерінің функциясы болсын. $\varphi(t)$ функциясы L қисығында Гёльдер(H шарты) шартын қанағаттандырады деп айтады, егер осы қисықтың кез-келген екі нүктесі үшін

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \le A|t_2 - t_1|^{\lambda} \qquad (7)$$

болса, мұндағы A және λ – оң тұрақтылар, A Гёльдер тұрақтысы деп, ал λ Гёльдер көрсеткіші деп аталады, $0 \le \lambda \le 1$.

Егер $\lambda > 1$ болса, онда $\lambda = 1 + \alpha (\alpha > 0)$ деп ұйғарып, (1) шартынан

$$\frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|} < A|t_2 - t_1|^{\alpha}$$

аламыз, онда $|t_2 - t_1| \to 0$ болғанда $\varphi'(t)$ туындысы барлық жерде нөлге тең және $\varphi(t)$ функциясы L-де тұрақтыға тепе-тең болатын еді.

Егер $\lambda = 1$, онда Гёльдер шарты белгілі Липшиц шартымен сәйкес.